



யாழ்ப்பாணம் இந்துக் கல்லூரி

இடர் விடுமுறைக்கால சுயகற்றலுக்கான செயலட்டை - 2020
தரம் - 13 (2020) | இணைந்த கணிதம்

பெயர் / சுட்டெண் :

திரு.யோ.மதுசூதனன் B.Sc, Dip in Edu

எளிமை இசை இயக்கம்

1. இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனியுடன் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு கிடை நிலத்திலிருந்து உயரம் $4l$ இல் இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது துணிக்கை P நாப்பத்தில் தொங்கும்போது இழையின் நீட்சி l ஆகும். மீள்தன்மை மட்டு mg எனக்காட்டுக.

2. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை p ஆனது இயற்கை நீளம் l ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ ஐயும் உடைய ஒரு மீள்தன்மை இழை AB யின் நுனி A உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை நுனி B ஆனது தரையிலிருந்து $2l$ இலும் கூடிய உயரத்தில் இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது B யிலே ஓய்வில் வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டினை பயன்படுத்தி,

- இழையின் உயர் நீளம் $2l$ எனக் காட்டி ,
- இழை மட்டுமட்டாக ஈர்க்கப்பட்டிருக்கும் போது P யின் வேகத்தை காண்க.
- நேரம் t யில் இழையின் நீளம் $x(> l)$ எனக் கொள்வோம். P யின் வேகம் x' ஐத் துணிவதற்கான சமன்பாட்டினை எழுதுக.

$$\text{இச் சமன்பாட்டிலிருந்து } \ddot{y} + \frac{4g}{l}y = 0; y \geq -\frac{l}{4}$$

ஏன்னும் வடிவத்தில் உள்ள சமன்பாடு கிடைக்கிறதெனக் காட்டுக. இங்கே $y = x - \frac{5l}{4}$; y யிற்காக $y = A \cos wt + B \sin wt$ வடிவத்தில் உள்ள ஒரு தீர்வைக் கருத்திற் கொண்டு A, B, w ஆகிய மாறிலிகளை காண்க. இதிலிருந்து

- y யின் உயர் பெறுமானத்தை துணிந்து அதன் மூலம் இழையின் உயர் நீளத்தைப் பெறுக.
- P யின் அதியுயர் கதியை காண்க.

3. இயற்கை நீளம் l உடைய இலேசாக மீள்தன்மை இழை ஒன்றின் நுனி ஒன்று பாவுகையிலே (சீலிங்கிலே) ஒருபுள்ளி O உடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது வளையம் புள்ளி O விலே ஓய்வில் வைத்திருக்கப்படும் போது இழையின் மற்றைய நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு M

உடைய ஒரு துணிக்கை நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது இழையின் மீள்தன்மை மட்டு $2Mg$ எனின் நாப்பதானத்தில் இழையின் நீட்சி $\frac{l}{2}$ எனக் காட்டுக.

இப்போது O விலே ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும் வளையம் இழை வழியே ஈர்பின் கீழ் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்முகமாய் வழக்கி உடன் மோதி ஒன்றிணைகின்றது வளையத்தையும் துணிக்கையையும் கொண்ட சேர்த்திப் பொருள் வேகம் $\frac{m}{m+M}\sqrt{3gl}$ உடன் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்முகமாய் இயங்கத் தொடங்குமெனக் காட்டுக. இழையின் நீட்சி x ஆக இருக்கும் போது சேர்த்திப் பொருளுக்கான இயக்கச் சமன்பாட்டினை எழுதி சேர்த்திப் பொருள் மீடறன் $\sqrt{\frac{2Mg}{(M+m)l}}$ உடன் எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றதெனக்காட்டுக.

4. இயற்கை நீளம் l ஐக் கொண்ட இலேசான மீள்தன்மை இழை ஒன்றின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனியிலிருந்து திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கை p நாப்பதில் (சமநிலையில்) தொங்குகின்றது நிலைக்குத்து நாப்பதானத்தில் இழையில் உள்ள நீட்சி c ஆகும் இழையின் மீள்தன்மைமட்டை காண்க. துணிக்கை p நாப்பத்திலே ஓய்வில் இருக்கும் போது சம திணிவுள்ள வேறோரு துணிக்கை Q ஆனது p யிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே ஓர் உயரம் c யில் ஓய்விலிருந்து விழுந்து p உடன் மோதி இணைகின்றது மொத்தலுக்குப் பின்னர் நேரம் t யில் இழையில் உள்ள நீட்சி x ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} + \omega^2(x - 2c) = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக. இங்கே $\omega^2 = \frac{g}{2c}$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள a, b மாறிலிகளைக் காண்க. $t = \frac{3\pi\sqrt{2c}}{4\sqrt{g}}$ கணநிலை ஓய்வுக்கு வருகின்றதெனக் காட்டி இக்கணத்தில் இழையில் உள்ள நீட்சியைக் காண்க.

5. இயற்கை நீளம் l ஐயும் மட்டு mg யையும் உடைய மீள்தன்மை இழை ஒன்று ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசை மீது அதன் ஒரு விளிம்பிலிருந்து தூரம் $2l$ இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை p உடன் இழையின் மற்றைய நுனி இணைக்கப்பட்டுள்ளது நீளம் l ஐ உடைய இலேசான மீள்தன்மையின்றிய இழையொன்று துணிக்கை p யைத் திணிவு m ஐ உடைய ஓர் இரண்டாம் துணிக்கை Q வுடன் தொடுக்கின்றது தொடக்கத்திலே $PO = PQ = l$ ஆக இருக்கும் போது துணிக்கை Q யானது மேசையின் விளிம்புக்கு அன்மையில் வைக்கப்பட்டு அதன் மீது தொகுதி ஓய்விலிருந்து இயங்கத் தொடங்குமாறு மெதுவாக தள்ளப்படுகின்றது நேரம் t யில் $op = l + x$ ஆகும் அத்தோடு துணிக்கை p யானது மேசைமீது தங்கியிருக்கும் அதே வேளை துணிக்கை Q ஆனது மேசையின் மட்டத்துக்கு கீழே ஆழம் x இல் உள்ளது பெறிமுறைச் சக்திக் காப்புக்

கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக $\dot{x}^2 = \omega^2(l^2 - (l - x^2)^2)$ எனக் காட்டுக இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{2l}$ p யில் உண்டாகும் எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் வீச்சையும் காண்க.

கணம் $t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$ இல் ஆனது மேசையின் விளிம்பை அடைகின்றதெனக் காட்டி இக்கணத்தில் அதன் கதியை காண்க.

6. இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனியானது ஒரு நிலைத்த புள்ளி O வில் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை இழையின் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது துணிக்கை நாப்பத்தில் தொங்கும் போது இழையின் நீளம் $\frac{3l}{2}$ ஆகும் இழையின் மீள்தன்மை மட்டைக் காண்க.

இப்போது துணிக்கை அதன் நாப்பத்தானத்திலிருந்து தூரம் a யிற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி இழுக்கப்பட்டு அவ்விடத்தில் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது நேரம் t யில் நாப்பத் தானத்திலிருந்து கீழ் நோக்கி அளக்கப்பட்ட துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி x யாகும் இழை இறுக்கமாக இருக்கும் வரைக்கும் $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\omega^2 = \frac{2g}{l}$

$a < \frac{l}{2}$ ஆக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் நடைபெறும் இயக்கத்தின் ஆவர்த்தனத்தையும் வீச்சத்தையும் காண்க.

$a = \frac{l}{2} + b, (b > 0)$ ஆக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் இழை முதலில் தளர்வதற்கு எடுக்கும்

நேரம் $\sqrt{\frac{l}{2g}} \left[\pi - \cos^{-1} \frac{l}{l+2b} \right]$ எனக் காட்டுக.

சமன்பாடு $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ இன் தீர்வு $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ எனக் கொள்ளலாம் இங்கு A, B ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய இரு மாறிலிகளாகும்.

7. இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O வுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனியில் முறையே $m, 3m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் இழையை $l + 4a$ நீளத்துக்கு ஈர்த்துக்கொண்டு நாப்பத்தில் ஒருமிக்க தொங்குகின்றன துணிக்கை Q சடுதியாக விழுந்து விடுகின்றது நேரம் t இற்குப் பின்னர் இழையின் நீளம் $l + x$ எனின் $x > 0$ இற்குச் சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{g}{a}(x - a) = 0$ ஜப் பெறுக.

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = a + b \sin \omega t + c \cos \omega t$ எனத் தரப்பட்டிருப்பின் b, c ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களை காண்க இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{a}$

துணிக்கை p ஆனது தொடக்கத் தானத்துக்கு மேலே அடையும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தை கண்டு அவ்வயரத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}}(\pi - \alpha + 2\sqrt{2})$ எனக்காட்டுக.

8. ஒரு துணிக்கை p ஆனது வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2$ மீது சீர்க் கதி $a\omega$ உடன் இயங்குகின்றது p யிலிருந்து y அச்ச மீதுள்ள செங்குத்தின் அடி Q எனின் Q ஆனது ஆவர்த்தனம் $\frac{2\pi}{\omega}$ உடன் எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றதெனக் காட்டுக

இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான சுருளி வில் அதன் அச்ச நிலைக்குத்தாக இருக்கக் கீழ் நுனியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது வில்லின் மேல் நுனியில் வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை ஓய்வில் இருக்கும் வில்லை d தூரம் நெருங்கத்தக்கது இங்கு $d < l$ அதே துணிக்கை ஓர் உயரம் h இலிருந்து வில்லின் மேல் நுனி மீது போடப்படுமெனின் $l \geq a + d$ எனத் தரப்படும் போது துணிக்கை வீச்சம் $a = \sqrt{d^2 + 2dh}$ உடன் ஓர் எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுமெனக் காட்டுக.

இவ்வியக்கத்தில் துணிக்கை குறைந்தபட்சம் நேரஆயிடை $\frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{g}}$ இற்கேனும் வில்லின் மீது தங்கியிருக்குமெனின் $\frac{h}{d}$ இன் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானத்தைக்காண்க.

9. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P யானது இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஒரு மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு சீலிங்கின் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O வுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு λ எனின் துணிக்கை P நாப்பத்தில் தொங்கும்போது இழையின் நீட்சி a ஆனது $a = \frac{mgl}{\lambda}$ இனால் தரப்படும் எனக்காட்டுக.

OP நிலைக்குத்தாகவும் $l + a + b$ யிற்கு சமமாகவும் இருக்கத்தக்கதாக இழை இப்போது ஒரு மேலதிக நீளம் $b (> a)$ யினால் ஈர்க்கப்பட்டு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது இழையின் நீளம் $l + a + x$ ஆக இருக்கும் போது இங்கு $-a \leq x \leq b$ துணிக்கை p யின் இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதி வழக்கமான குறியீட்டில் $\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$ எனக்காட்டுக

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கின்றதெனக் கொண்டு A, B ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

துணிக்கை p நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$ இற்கு எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றது எனவும் இங்கு $\alpha = \sin^{-1} \frac{a}{b}$ எளிய இசை இயக்கத்திலிருந்து விலகும் நேரத்தில் துணிக்கை p யின்

வேகம் மேல்நோக்கி $\sqrt{\frac{g}{a}(b^2 - a^2)}$ எனவும் காட்டுக அத்துடன் துணிக்கை p பின்னர்
புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்கி $b > a\sqrt{1 + \frac{2\lambda}{mg}}$ எனின் சீலிங்கில் பூச்சியமல்லாத வேகத்துடன்
அடிக்கும் எனவும் காட்டுக.